

**Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava**

číslo 2, rok 2011, ročník XI, řada stavební

článek č. 35

**Oldřich SUCHARDA<sup>1</sup>, Jiří BROŽOVSKÝ<sup>2</sup>****MODELÝ BETONÁŘSKÉ VÝZTUŽE PRO KONEČNĚPRVKOVOU ANALÝZU KONSTRUKCÍ****MODELS FOR REINFORCEMENT IN FINAL FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STRUCTURES****Abstrakt**

Železobeton patří k nejdůležitějším konstrukčním materiálům. Článek se zabývá modelováním betonářské výztuže pro konečněprvkovou nelineární analýzu konstrukcí. Vybrané modely výztuže jsou ověřeny na numerických simulacích, které jsou srovnány s experimenty. Zvláštní pozornost je věnována prokluzu výztuže, pro který je implementován lineárně pružný spojovací prvek v kombinaci s pružnoplastickými modely výztuže a betonu.

**Klíčová slova**

Nosník, beton, výztuž, spojovací prvek, metoda konečných prvků, plasticita.

**Abstract**

Reinforced concrete belongs to one of the most important structural materials. The paper discusses modeling of steel reinforcement within non-linear finite element analysis. Selected models of reinforcement have been verified against numerical simulations and validated through experiments. Particular attention is paid to a reinforcement slip, for which a linearly elastic bond element is designed and implemented in conjunction with elastic – plastic models for both reinforcement bars and concrete.

**Keywords**

Beam, concrete, reinforcement, bond element, finite elements, plasticity.

**1 ÚVOD**

Železobeton patří k jedněm z nejdůležitějších konstrukčních materiálů. Kombinuje dva rozdílné materiály. Jedná se o beton, který vyniká relativně velkou pevností v tlaku a malou pevností v tahu, a ocelovou výztuž. Pro statické analýzy vznikla celá řada materiálových modelů, které velmi dobře vystihují jeho chování. Jedním z nich je pružnoplastický model [16], který kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity [4] a model zpevnění vypracovaný Ohtanim [9]. Podrobnosti k uvedenému modelu a jeho implementaci do výpočetního programu *BSA*, který byl dále používán pro numerické výpočty, uvádí [16]. Dále byl pro ověření některých výpočtů použit model *Concrete* z výpočetního systému ANSYS [15,17]. Protože model *Concrete* vznikl v rámci rozsáhlého programového systému, je dále možné model betonu použít například při řešení sdružených úloh [7]. Pro modelování výztuže při konečněprvkové analýze vznikla řada teoretických modelů. Vybrané modely budou diskutovány v dále uvedené numerické studii. Při konečněprvkové analýze

<sup>1</sup> Ing. Oldřich Sucharda, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 32 1391, e-mail: [oldrich.sucharada@vsb.cz](mailto:oldrich.sucharada@vsb.cz).

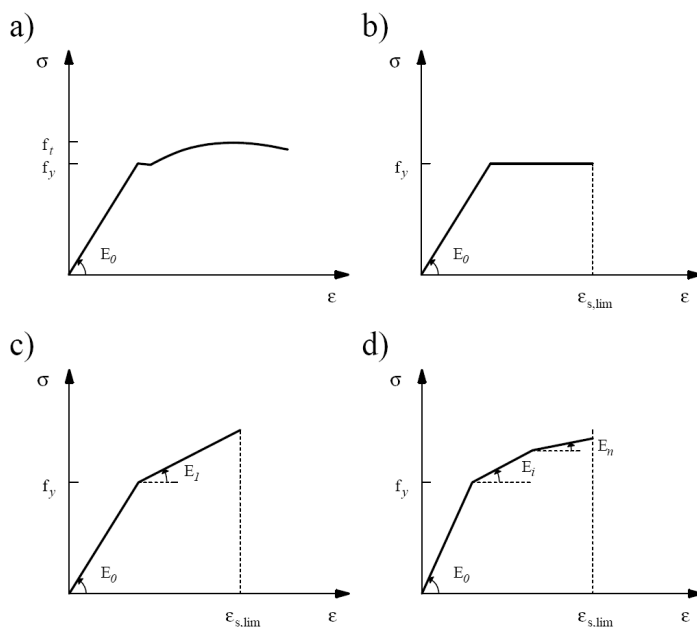
<sup>2</sup> Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: [jiri.brozovsky@vsb.cz](mailto:jiri.brozovsky@vsb.cz).

železobetonových konstrukcí se může dle [3] při modelování výztuže vyjít z modelu rozetřené výztuže, vložených modelů výztuže a diskretních modelů výztuže. U modelů výztuže se pak dále rozlišuje, jakým způsobem zohledňují prokluz mezi betonem a výztuží. Uvedený problém se často řeší speciálními spojovacími prvky [6].

## 2 VÝZTUŽ

Železobetonové konstrukce se ve většině případů vyztužují betonářskou výztuží z betonářské oceli. Výztuž má nejčastěji podobu prutů s žebírky nebo vtisky. Dále může být výztuž tvořena dráty nebo v současné době často používanými svařovanými sítěmi. Existují také zvláštní případy vyztužování. Jedná se o předpínací výztuže u předpjatých konstrukcí nebo tuhé výztuže. Tuhá výztuž kombinuje sprážením válcovaných profilů s betonem [10].

Betonářská výztuž pro účely tohoto článku se považuje za izotropní materiál, má vysokou pevnost, která je stejná pro tlak a tah. Běžně se pohybuje v rozmezí kolem 300 až 700 MPa. Základní materiálové charakteristiky oceli se zjišťují z tahových zkoušek, kdy získané pracovní diagramy popisují jednoosý stav napětí. Z pracovního diagramu je patné, že ocel vykazuje v počáteční fázi lineárně pružné chování do úrovně označované jako mez úměrnosti. Důležitou hodnotou je mez kluzu, po jejímž překročení vznikají plastické deformace. Další průběh pracovního diagramu záleží na konkrétním složení oceli, výrobním postupu nebo technologických úpravách a zvolené míře idealizace.



Obr. 1: Pracovní diagramy - a) betonářská výztuž b) ideálně pružnoplastický c) ideálně pružnoplastický s lineárním zpevněním d) multi-lineární

Nejpoužívanější pracovní diagramy oceli jsou lineárně pružný, ideálně pružnoplastický, pružnoplastický s lineárním zpevněním a multi-lineární zobrazené na obr. 1 [6]. Velmi dobré shody mezi skutečným a idealizovaným pracovním diagramem dosahuje pružnoplastický s lineárním zpevněním [10]. Vyžaduje dobře dostupné informace mez kluzu, počáteční modul pružnosti, modul pružnosti pro oblast zpevnění a maximální poměrnou deformaci. Podmínka plasticity se pro jednoosý stav napětí u pružnoplastického pracovního diagramu zjednoduší na tvar [10]

$$\sigma \leq f_y, \quad (1)$$

kde:

$\sigma$  – je napětí při jednoosé napjatosti a

$f_y$  – je mez kluzu oceli.

Poměrná deformace je smluvně omezena hodnotou  $\varepsilon_{s, \lim}$ .

### 3 MODEL ROZETŘENÉ VÝZTUŽE

Model rozetřené výztuže [6] je nejvhodnější při modelování drátkobetonu, ale může se také použít při modelování hustějších tyčových výztuží menšího průměru. U modelu se sestaví matice tuhosti materiálu výztuže pro jednotlivé směry vyztužení, kdy se při výpočtu vychází z rozměrů a vlastností základního materiálu, tzn. betonu. Tuhost každého směru výztuže je možné popsat maticí tuhosti materiálu

$$\mathbf{D}_{s,i} = \begin{bmatrix} pE_{s,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kde  $p$  je stupeň vyztužení určený z poměru plochy výztuže k celkové ploše průřezu (konečného prvku) a  $E_{s,i}$  je modul pružnosti materiálu výztuže. Matice tuhosti výztuže se dále transformuje do správného souřadného systému rovnicí

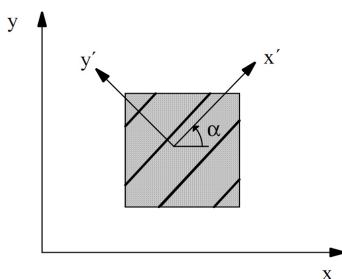
$$\mathbf{D}_s = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{D}_{s,x} \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (3)$$

kde:

$\mathbf{T}_\sigma^{-1}$  – je transformační matice,

$\mathbf{D}_{s,x}$  – je matice tuhosti výztuže a

$\mathbf{T}_\varepsilon$  – je transformační matice.



Obr. 2: Model rozmazané výztuže

Transformační matice jsou definovány [6]

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Transformační matice [5] závisí na sklonu výztuže v souřadném systému, kdy člen  $c$  je  $\cos \alpha$  a  $s$  vyjadřuje  $\sin \alpha$ . Tuhost výztuže se přičítá k matici tuhosti materiálu  $\mathbf{D}$  pro beton. Výsledná matice tuhosti materiálu má tvar

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{s,i} , \quad (5)$$

kde:

$\mathbf{D}_c$  – je matice tuhosti betonu,

$\mathbf{D}_{s,i}$  – je matice tuhosti výztuže v jednotlivých směrech.

Model rozetřené výztuže předpokládá dokonalé spolupůsobení výztuže s betonem. Z uvedeného předpokladu vyplývá, že model nerespektuje prokluz mezi výztuží a betonem.

#### 4 MODEL VLOŽENÉ VÝZTUŽE

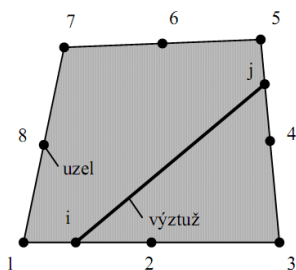
Další možností je použití vložených modelů výztuže, které také předpokládají dokonalé spolupůsobení výztuže s betonem. Modely se například používají v kombinaci s obdélníkovými nebo izoparametrickými konečnými prvky. Konečné prvky výztuže jsou zapuštěny do rovinných a prostorových konečných prvků betonu. Ve výpočtu se využívá speciálních transformačních matic. Výsledná matice tuhosti konečného prvku se zapíše ve tvaru

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{s,i} , \quad (6)$$

kde:

$\mathbf{K}_c$  – je matice tuhosti konečného prvku betonu a

$\mathbf{K}_{s,i}$  – je matice tuhosti konečného prvku výztuže v jednotlivých směrech.



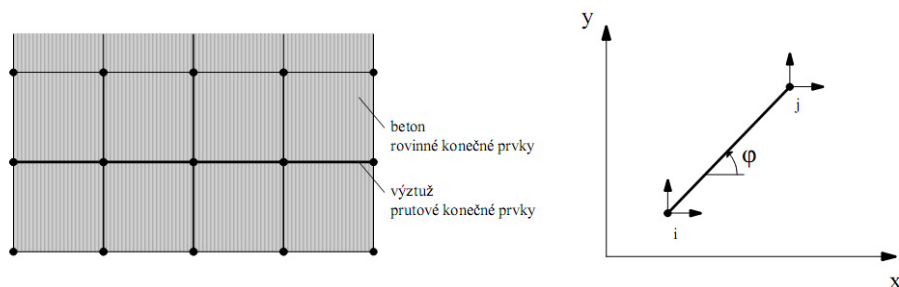
Obr. 3: Vložený model výztuže (1-9 uzly betonu, i, j uzly výztuže)

Pro obdélníkový konečný prvek a jednoduché umístění výztuže v prvku, je možné dokázat, že výsledná tuhost konečného prvku železobetonu je pro oba popsané modely výztuže stejná. Z hlediska implementace modelu výztuže do výpočetních programů patří k náročnějším, protože speciální transformační matice se musí odvodit pro každý konečný prvek zvlášť. Použití uvedeného modelu výztuže a speciální transformační matice pro obdélníkový konečný prvek uvádí [13]. Uvedený model výztuže je dále například implementovaný u vybraných izoparametrických konečných prvků ve výpočetním systému ANSYS [15].

#### 5 DISKRÉTNÍ MODEL VÝZTUŽE

Diskrétní model výztuže kombinuje dva konečné prvky. Konečný prvek pro beton a pro výztuž, kdy oba konečné prvky mají vybrané uzly společné. Konečné prvky výztuže tvoří jednorozměrné prvky, které mají v úlohách rovinné napjatosti a deformace dva uzly a dva stupně

volnosti v každém uzlu. Uvedený postup vyžaduje vytvořit vhodnou síť konečných prvků, do které se následně umísťují prutové prvky výztuže. Pro modelování tyčové výztuže se může využít i různě modifikovaných jednorozměrných konečných prvků.



Obr. 4: Diskrétní model výztuže

Matice tuhosti prutového konečného prvku s dvěma uzly a dvěma stupni volnosti se zapíše ve tvaru:

$$\mathbf{K} = \frac{E_s A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -c^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kde:

- $E_s$  – je modul pružnosti oceli,
- $A$  – je průřezová plocha prutu,
- $L$  – je délka prutu,
- $c$  – je  $\cos \varphi$  a
- $s$  – je  $\sin \varphi$ .

Model je vhodný zejména pro použití u hlavní nosné výztuže. Model také umožňuje použití speciálních spojovacích prvků a rozhraní, které umožňují zohlednit prokluz mezi betonem a výztuží.

## 6 SPOJOVACÍ PRVEK MEZI BETONEM A VÝZTUŽÍ

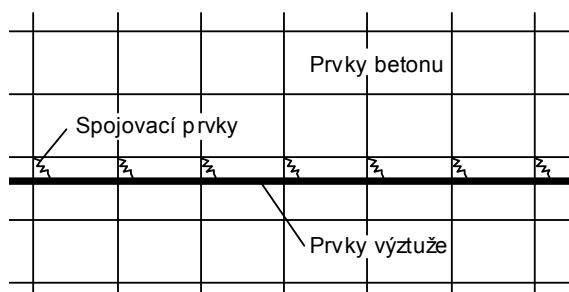
Soudržnost mezi betonem a výztuží není ve skutečnosti dokonalá. Záleží především na povrchu a geometrii výztuže. Pro vylepšení soudržnosti se betonářská výztuž upravuje žebírkováním nebo vtisky. Někdy se také ještě používá hladká výztuž, ale z hlediska soudržnosti betonu s ocelí není vhodná.

U analýz železobetonových konstrukcí, kde je zajištěno konstrukčními opatřeními a volbou vhodné úpravy výztužných vložek omezení prokluzu na požadovanou úroveň, se počítá ve většině výpočtů s ideálním spolupůsobením betonu a výztuže. Důsledkem je, že se zvýší celková tuhost modelu konstrukce. Vliv prokluzu také závisí na zvoleném konstitutivním modelu betonu.

V případech, kdy je však nutné ověřit vliv prokluzu nebo se zpracovává podrobná analýza, je pro modelování prokluzu mezi betonem a výztuží nejvhodnější použití diskrétního modelu výztuže a speciálních spojovacích prvků [12]. Spojovací prvky si lze představit jako malé pružiny. Grafické znázornění je na obr. 5. Matice tuhosti spojovacího prvku se zapíše ve tvaru

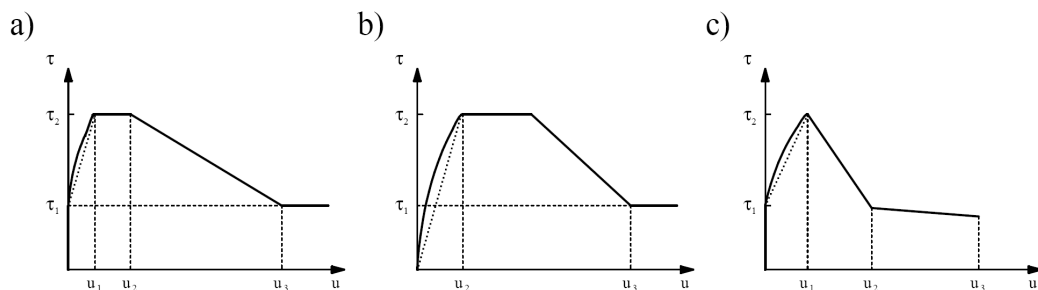
$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

kde  $k$  je koeficient tuhosti spojovacího prvku a jednotlivé členy matice odpovídají společnému uzlu betonu a výztuže ve kterém se modeluje prokluz. Podrobné odvození a využití spojovacích prvků uvádí [13]. Při určování tuhosti spojovacích prvků se vychází ze zkoušek.



Obr. 5: Spojovací prvek mezi betonem a výztuží

Pro popis chování spojovacích prvků je důležité, jedná-li se o monotónní nebo cyklické zatěžování. U návrhu kotvicích prvků a cyklického zatěžování je pak vhodnější použití trojrozměrných výpočetních modelů s použitím spojovacích rozhraní, které umí zohlednit například také typ žebrování. Pro praktické použití u celkových analýz železobetonových konstrukcí s monotónním zatěžováním mají ale omezený přínos na úkor výpočetní náročnosti, konvergence výpočtu a náročnosti získaných informací z experimentů, které jsou nutné.



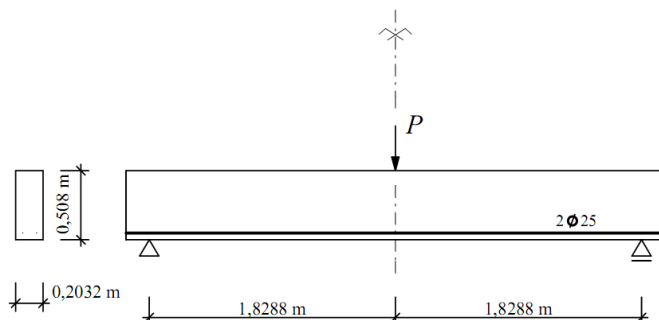
Obr. 6: Pracovní diagram prokluzu mezi betonem a výztuží pro monotónní zatěžování a) Kwak a Filippou [5,11] b) CEB-FIB [3] c) Bigaj [2]

Pro praktické určování tuhosti u výpočtu je vhodné použití pracovních diagramů uvedených v doporučeních CEB-FIB [3] nebo výzkumných pracích [2, 5, 11]. Pracovní diagramy se liší především počáteční tuhostí mezi betonem a ocelí. Pro výpočet celkové únosnosti konstrukce má na výsledky zpravidla největší vliv tvar vzestupné větve pracovního diagramu.

## 7 NUMERICKÝ PŘÍKLAD

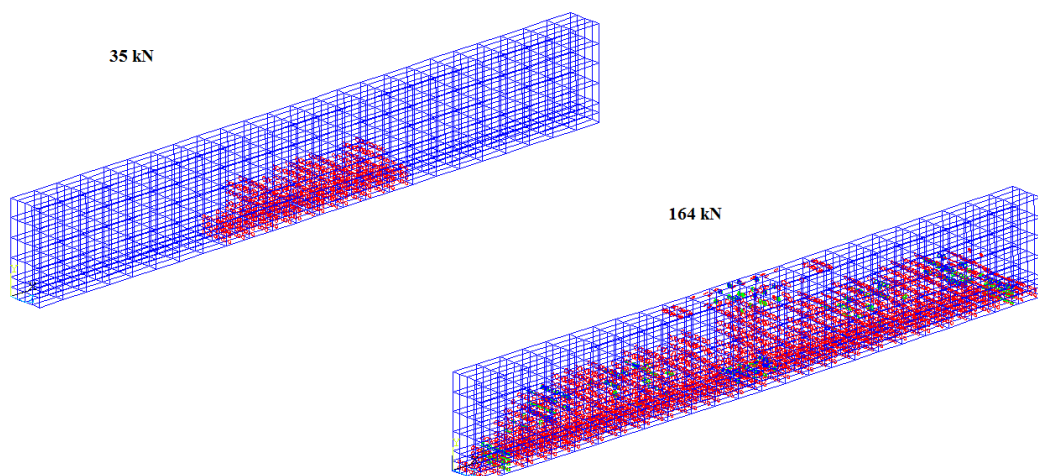
V numerické analýze je provedena analýza železobetonového nosníku pro dva různé modely výztuže a betonu [15,16], které jsou srovnány s experimentem [1]. Následně je provedena studie pro použití spojovacího prvku s pružnoplastickým modelem betonu [16], který kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity [4] a model zpevnění vypracovaný Ohtaním [9]. Železobetonový nosník, který byl použit pro experiment, má tvar obdélníku, rozpětí 3,6576 m a je zatížen osamělou silou. Schéma experimentu, polohy osamělé síly, okrajových podmínek a vyztužení zobrazuje obr. 7. Zatížení má velikost 200 kN. Výchozí materiálovou charakteristikou u betonu z experimentu je

modul pružnosti  $E_{cm} = 26\,182$  MPa [8], který byl použit pro oba konstitutivní modely betonu. U modelu *Concrete* je smyková tuhost porušeného betonu v tahu zohledněna koeficientem smykového přenosu pro otevírání trhliny  $\beta_t = 0,5$  a koeficientem smykového přenosu pro uzavřenou trhlinu  $\beta_c = 0,9$ . Pracovní diagram oceli je pružnoplastický se zpevněním. Počáteční modul tuhosti má hodnotu  $E_{s1} = 203\,255$  MPa. Mez kluzu oceli je  $f_y = 309,36$  MPa. Po dosažení meze kluzu je modul tuhosti  $E_{s2} = E_{s1}/100$ . Úloha byla řešena přírůstkově iteračním postupem pomocí Newton-Raphsonovy metody [14].

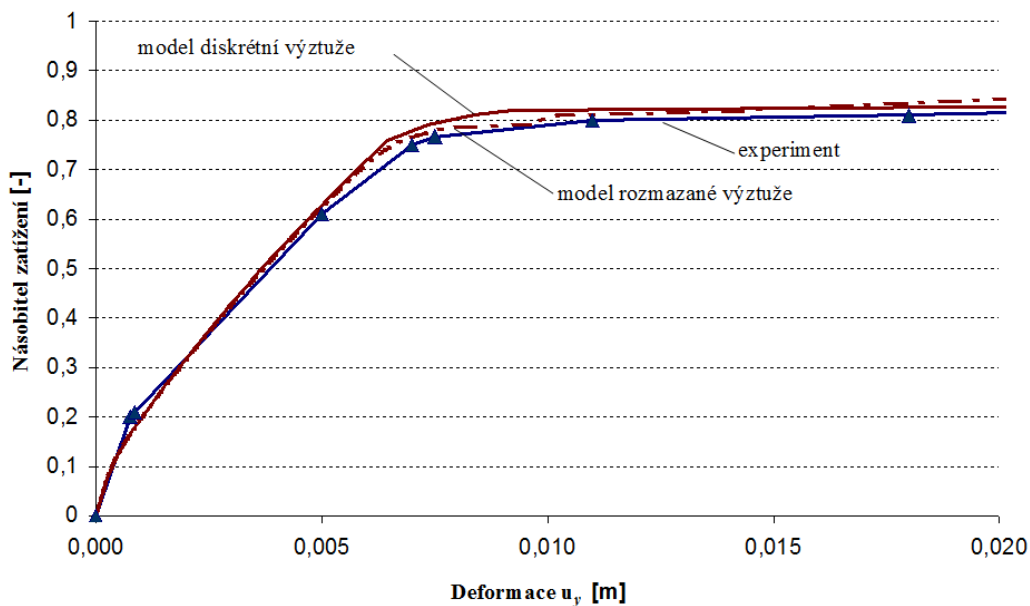


Obr. 7: Schéma experimentu

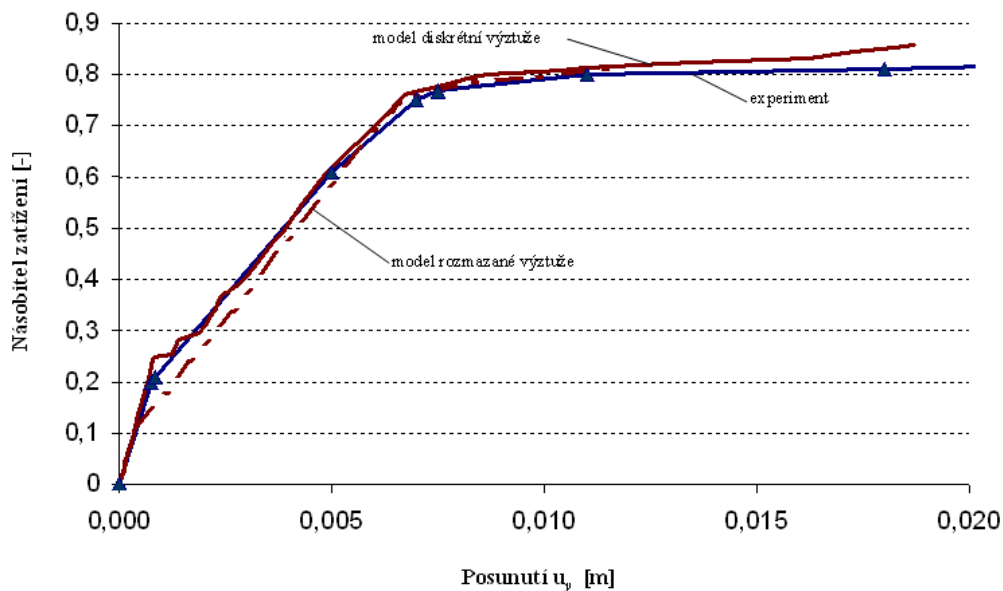
Průběhy pracovních diagramů pro jednotlivé typy modelů výztuže a betonu zobrazuje obr. 9. a 10. Graf zobrazuje průhyb uprostřed rozpětí. Výsledky provedených výpočtů mají dobrou shodu s experimentem ve všech třech fázích zatěžování. Rozdíly mezi výsledky pro model rozmazané a diskretní výztuže se mohou považovat za malé, kdy charakter pracovního diagramu je stejný. Pouze u modelu *Concrete* v počáteční fázi vzniku trhlin se liší. U pružnoplastického modelu se nejvíce rozcházejí křivky v oblasti počáteční plastizace výztuže a drcení betonu. Dosažená úroveň zatížení je téměř stejná, pouze se liší v maximální dosažené deformaci, která ale souvisí také s nastavenými konvergenčními pravidly. Pro provedené výpočty je také společné, že mírně nadhodnocují tuhost porušovaného betonu. Možným důvodem je, že při výpočtu se předpokládalo dokonalé spolupůsobení výztuže s betonem. Řešením problému je využití dále uvedených speciálních spojovacích prvků mezi výztuží a betonem. Pro ilustraci provedených výpočtů jsou zvoleny výsledky rozvoje trhlin z výpočetního systému ANSYS pro model *Concrete* na obr. 8. Konkrétně se jedná o kombinaci s modelem rozmazané výztuže v počáteční fázi vzniku trhlin a stavu těsně před ukončením výpočtu. Grafické výsledky pro pružnoplastický model betonu z programu *BSA* jsou dostupné v [16].



Obr. 8: Rozvoj trhlin: počáteční trhliny (zatížení 35 kN a 164 kN)



Obr. 9: Výsledky numerické analýzy: pružnoplastický model betonu

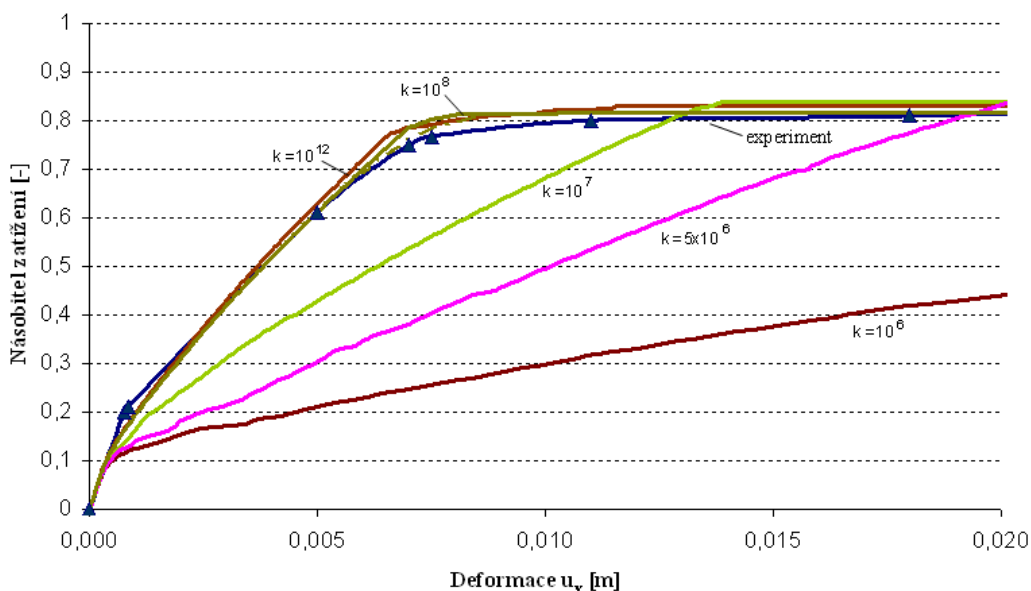


Obr. 10: Výsledky numerické analýzy: model *Concrete*

Na obr. 11 jsou zobrazeny pracovní diagramy výpočtů, u kterých byl použit diskrétní model výztuže, speciální spojovací prvky a pružnoplastický model ve výpočetním programu *BSA*. Vstupní parametry pro studii ke spojovacím prvkům zůstaly totožné jako v předešlém výpočtu.



U spojovacích prvků se v tomto případě předpokládá konstantní tuhost a vycházelo se z pracovního diagramu uvedeného v doporučení [3]. Jde o konzervativní přístup, který tak dává představu o vlivu tuhosti spojovacího prvku na výpočet. U spojovacích prvků, které měly menší tuhost, výpočet trval mnohem déle a byl méně stabilní. Pro tuhost spojovacího prvku  $k = 10^{12}$  je možné považovat spojení výztuže a betonu téměř za dokonalé. Jako nejvhodnější se ukázala hodnota  $10^8$ , pro kterou měly výsledky výpočtu nejlepší shodu s experimentem. V grafu je také zobrazen výpočet (čerchovaně), kdy se proměnná tuhost spojovacího prvku určila z doporučení a informací uvedených v [5, 11, 2].



Obr. 11: Výsledky numerické analýzy: spojovací prvky

## 8 ZÁVĚR

V příspěvku byly prezentovány výsledky dvou přístupů modelování výztuže, které porovnáním s experimentem dávaly velmi podobné výsledky. Jednalo se modely rozetřené a diskrétní výztuže. Rozdíl pracovních diagramů získaných z výpočtů a z experimentu je možné přisoudit předpokladu dokonalého spolupůsobení výztuže a betonu. Výsledky proto byly porovnány s řešením využívajícím model diskrétní výztuže a spojovací prvky. Použití spojovacích prvků je uvedeno ve srovnávací studii pro různé parametry tuhosti spojovacího prvku. Pro použití speciálních spojovacích prvků je nejvhodnější použít vstupní data z experimentů nebo doporučení uvedených v [2, 3, 5, 11].

## PODĚKOVÁNÍ

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT ČR, projekt 1M0579, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. (This outcome has been achieved with the financial support of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic, project No. 1M0579, within activities of the CIDEAS research centre.)

## LITERATURA

- [1] BARZEGAR, F. *Layering of RC Membrane and Plate Elements in Nonlinear Analysis*. Journal of the Struct. Div. 1988, Vol. 114, No.11. p. 2474-2492.
- [2] BIGAJ, A. J. *Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in RC Beam and Slabs*. PhD Thesis. Delf University of Technology, ISBN 90-407-1926-8.
- [3] CEB - FIP Model Code 1990: Design Code. by Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford, 1993. ISBN: 978-0727716965.
- [4] CHEN, A. C. T., CHEN, W. F. *Constitutive Relations for Concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1975
- [5] FILIPPOU, F. C. *A Simple Model for Reinforcing Bar Anchorages Under Cyclic Excitations*. ASCE, Journal of Structural Engineering. 1986, Vol. 112, No. 7, pp. 1639-1659.
- [6] HOFSTETTER, G., MANG, H., A. Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. Wiesbaden: Vieweg, 1995. ISBN 3-528-06390-4.
- [7] KRÁLIK, J., HUKEL, D. Nelineárna analýza interakcie ocelevej výstelky a železobetónovej steny šachty lokalizácie havárie za extrémneho pôsobenia tlaku a teploty. In *Modelování v mechanice 2010*. Mezinárodní konference. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2234-1.
- [8] MEGUID HEKAL, S. A. *Solution of Plate Structures Respecting Real Material Properties*. Disertační práce. Brno: Brno University of Technology, 1992.
- [9] OHTANI, Y., CHEN, W. F., *Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials*. Journal of the EDM ASCE, 1988.
- [10] PROCHÁZKA, J. a kol. Navrhování betonových konstrukcí 1. 2 vyd. Praha: ČVUT v Praze, 2006. ISBN 80-903807-1-9.
- [11] KWAK, H. G. *Material Nonlinear Finite Element Analysis and Optimal Design of Reinforced Concrete Structures*. Ph.D. Dissertation. Department of Civil Engineering, KAIST, Korea. 1990.
- [12] RAVINGER, J. Modelovanie nelineárneho pôsobenia železobetónového nosníka použitím MKP. Stavebnický časopis. 35, 1987-8, 571-589.
- [13] RAVINGER, J. Programy – statika, stabilita a dynamika stavebných konštrukcií. Alfa, Bratislava, 1990.
- [14] RAVINGER, J., PSOTNÝ, M. *Analýza konštrukcií, Nelineárne úlohy*. Bratislava: STU v Bratislavě, 2007. ISBN 978-80-227-2713-6.
- [15] RELEASE 11 DOCUMENTATION FOR ANSYS, SAS IP, INC., 2007.
- [16] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J., *Pružnoplustické modelování železobetonového nosníku: implementace a srovnání s experimentem*. Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební. 2011, roč. 11, č. 1, s. 237-244. ISSN: 1213-1962.
- [17] WILLAM, K. J., WARNKE, E. P. *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*, Proceedings of International Association for Bridge and Structural Engineering, Bergamo, 1975.

### Oponentní posudek vypracoval:

Dr.h.c. prof. Ing. Ján Ravinger, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze.